Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
- 1ère Année LMD-MI –AU 2015/2016-

Examen Final – Analyse 2 – (Durée 1 h 30mn)

Les livres et documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Chacune de vos réponses doit être justifiée et argumentée.

Exercice 1 (5pts) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \alpha \sin x + 1$ où α est une constante appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$.

1) Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = x_0$ (on pourra considérer $g(x) = f(x) - x$). **(2pts)**

2) Montrer que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur tout intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. **(1 pt)**

3) En déduire qu'il existe $A \in]0, 1[$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$: $|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|$. **(2 pts)**

Exercice 2 (6pts) Soit l'application $f :]-\pi, \pi[- \{0\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

En utilisant le développement limité, montrer que :

1) l'application f est prolongeable par continuité au point $x = 0$. **(2 pts)**

2) la fonction $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in]-\pi, \pi[- \{0\} \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) & si \quad x = 0 \end{cases}$

est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[$. **(3 pts)**

Exercice 3 (8pts) 1) Calculer les intégrales suivantes ;

a) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} sin^3 x \cos x \, dx$ **(2 pts)**

b) $\int_{-2}^{2} \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} dx$ **(1,5 pts)**

c) $\int_0^3 f(x) dx$ où $f(x) = \begin{cases} 2x^3 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ xe^x & si \quad 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ **(2 pts)**

2) Calculer $G(x) = \int \frac{3x^2+x+1}{3+x^2} dx$ **(2,5 pts)**

NB : 1 point est attribué à une copie bien présentée.

Université de Tlemcen
ANALYSE II. MI

A.U. 2015-2016.

Corrigé de l'épreuve finale

Exercice 1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = \alpha \sin x + 1 \quad , \quad \alpha \in]-1,1[$.

1) Montrons que : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = x_0$

Posons $g(x) = f(x) - x$.

g continue sur $\mathbb{R}$. De plus $g(0) = 1$
et $g(\pi) = 1 - \pi < 0$.

Donc $g(0).g(\pi) < 0$ et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$\exists x_0 \in]0,\pi[, g(x_0) = 0$ c-à-d $\exists x_0 \in]0,\pi[, f(x_0) = x_0$.

Par suite $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = x_0$.

2) $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$ (somme de la fonction sinus et d'une fonction constante)
f dérivable sur $]a,b[$ (" " " " ")

3) $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}, \exists c \in]a,b[, f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ d'après le th. des accroissements finis.

Or $f'(c) = -\alpha \cos c$

Donc $\exists c \in]a,b[, -\alpha \cos c = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Par suite : $(b-a)(-\alpha \cos c) = f(b) - f(a)$ et $|f(b)-f(a)| = |b-a||\alpha \cos c|$
$= |b-a||\alpha||\cos c|$
$|\cos c| \leq 1 \to \leq |\alpha||b-a|$.

Donc $\forall x,y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq A|x-y|$ avec $A = |\alpha|$
Si $x=y$: $0 = |f(x)-f(y)| = A.\underbrace{|x-y|}_{=0} \leq A.0$ pour A qcq dans $\mathbb{R}$, en particulier $A = |\alpha|$

Ceci donne, $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)| \leq A|x-y|$ avec $A = |\alpha|$.

$\alpha \in]-1,1[\Rightarrow 0 \leq |\alpha| < 1$

Si $\alpha \neq 0$, on a bien $0 < |\alpha| < 1$ et $A = |\alpha| \in]0,1[$.

Si $\alpha = 0$, $f(x) = 1$ et $\forall x,y \in \mathbb{R}, |f(x)-f(y)| = 0 \leq A|x-y|$ pour A qcq dans $\mathbb{R}^+$, en particulier pour $A \in]0,1[$.

Conclusion : $\exists A \in]0,1[, \forall x,y \in \mathbb{R} \ |f(x)-f(y)| \leq A|x-y|$

Exercice 2 : $f :]-\pi, \pi[- \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

1) $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{x \sin x}$. f continue sur $]-\pi, \pi[- \{0\}$.

Développement limité au voisinage de 0 de f à l'ordre 3.

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x) - x}{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x)\right)} \quad \text{avec } \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x)}{x^2 + x^3 \varepsilon_2(x)} \quad \text{avec } \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\overset{/x^2}{=} \frac{-\frac{x}{3!} + x\, \varepsilon_1(x)}{1 + x\, \varepsilon_2(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x}{3!} + x\, \varepsilon_1(x)}{1 + x\, \varepsilon_2(x)} = \frac{0}{1} = 0 \qquad (*)$$

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

2)

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]-\pi, \pi[- \{0\} \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) & \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sin x - x}{x \sin x} & \text{si } x \in]-\pi, \pi[- \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

D'après la 1ère question, g est continue sur $]-\pi, \pi[$.

$\forall x \in]-\pi, \pi[- \{0\}$, $g'(x) = f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

Dérivabilité en 0 : $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{f(x)}{x} \underset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{3!} + \varepsilon_1(x)}{1 + x\, \varepsilon_2(x)}$

$$= -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

Donc $g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} & \text{si } x \in]-\pi, \pi[- \{0\} \\ -\dfrac{1}{6} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

g' est continue sur $]-\pi, \pi[- \{0\}$ (composée de fcts continues)

Continuité de g' en 0 : $g'(x) = \dfrac{-\sin^2 x + x^2 \cos x}{x^2 \sin^2 x}$

$\lim\limits_{x \to 0} g'(x)$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$g'(x) = \frac{-\sin^2 x + x^2 \cos x}{x^2 \sin^2 x}$$

$$= \frac{-\left(x-\frac{x^3}{3!}+x^4\varepsilon_3(x)\right)^2 + x^2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_4(x)\right)}{x^2\left(x-\frac{x^3}{3!}+x^4\varepsilon_3(x)\right)^2}$$

$$= \frac{-\left(x^2 - 2\frac{x^4}{3!}+x^4\varepsilon_5(x)\right)+x^2 - \frac{x^4}{2!}+x^4\varepsilon_6(x)}{x^2\left(x^2-2\frac{x^4}{3!}+x^4\varepsilon_5(x)\right)}$$

$$= \frac{\frac{x^4}{3}-\frac{x^4}{2}+x^4\left(-\varepsilon_5(x)+\varepsilon_6(x)\right)}{x^4+x^4\varepsilon_7(x)} \qquad \varepsilon_i(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad i=1,2,\dots,8.$$

$$= \frac{-\frac{x^4}{6}+x^4\varepsilon_8(x)}{x^4+x^4\varepsilon_7(x)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{6}+\varepsilon_8(x)}{1+\varepsilon_7(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} g'(x) = -\frac{1}{6} = g'(0).$$

Donc g' est continue en 0.

<u>Conclusion</u> g' continue sur $]-\pi,\pi[$. Par suite $g \in C^1(]-\pi,\pi[)$.

<u>Exercice 3:</u>

1) a) $I_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\, dx$. On pose $u=\sin x$ donc $du = \cos x\, dx$.
$x=0 \Rightarrow u=0$ et $x=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow u=-1$.

$$I_1 = \int_0^{-1} u^3\, du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

b) $I_2 = \int_{-2}^{2} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$. Il est clair que si $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ alors f est impaire sur $\mathbb{R}$,

Donc $\underline{\underline{I_2 = 0}}$ car les bornes sont opposées.

c) $I_3 = \int_0^3 f(x)\, dx = \int_0^1 2x^3\, dx + \int_1^3 x e^x\, dx$

$$= \left[\frac{2}{4}x^4\right]_0^1 + \int_1^3 x e^x\, dx.$$

$$= \frac{1}{2} + \int_1^3 x e^x\, dx$$

$\int_1 x e^x\, dx = ?$ Intégration par parties: $u=x$ $du=dx$
$dv = e^x dx$ $v = e^x$.

$$\int_1^3 x e^x\, dx = \left[x e^x\right]_1^3 - \int_1^3 e^x\, dx$$

$$= 3e^3 - e - \left[e^x\right]_1^3 = 3e^3 - e - e^3 + e = 2e^3 \Rightarrow \underline{I_3 = \frac{1}{2}+2e^3}$$

c) $G(x) = \int \frac{3x^2+x+1}{3+x^2}\,dx$

$= \int \frac{3x^2+9-9+x+1}{3+x^2}\,dx$

$= \int \frac{3x^2+9}{3+x^2}\,dx + \int \frac{x-8}{3+x^2}\,dx$

$= \int 3\,dx + \int \frac{x}{3+x^2}\,dx - 8\int \frac{dx}{3+x^2}$

$= 3x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{3+x^2}\,dx - \frac{8}{3}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{3}}$

$= 3x + \frac{1}{2}\ln(3+x^2) - \frac{8}{3}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{3}}$

$\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{3}} = \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}$

Posons $u = \frac{x}{\sqrt{3}}$ $\quad du = \frac{dx}{\sqrt{3}}$ soit $dx = \sqrt{3}\,du$

$\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{3}} = \sqrt{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \sqrt{3}\,\text{Arctan}\,u + C = \sqrt{3}\,\text{Arctan}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + C$

<u>Finalement :</u> $G(x) = 3x + \frac{1}{2}\ln(3+x^2) - \frac{8\sqrt{3}}{3}\,\text{Arctan}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

Barème détaillé

Exercice 1: 1) g continue sur $\mathbb{R}$ 0,25

α_1, α_2 tq $\underbrace{g(\alpha_1)}_{0,5} \cdot \underbrace{g(\alpha_2)}_{0,5} \underset{0,25}{<} 0$

Th. des valeurs intermédiaires ... 0,5

2) f continue sur $[a,b]$ 0,5

dérivable sur $]a,b[$ 0,5

3) Th. des A.F: $\exists c \in]a,b[\dots$ 0,5

$|f(b)-f(a)| = |b-a||\alpha||\cos c|$ 0,25

$\leq |\alpha||b-a|$ 0,5

$\exists A \in]0,1[, \forall x,y \in \mathbb{R}, |f(x)-f(y)| \leq A|x-y|$ 0,75

Détails : Bonus : 0,5

Exercice 2 1) D.L numérateur 0,5

D.L dénominateur 0,5

D.L $f(x)$ 0,5

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ 0,25

Conclusion : $f(0) = 0$ 0,25

2) g continue sur $]-\pi,\pi[$ 0,25

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ si $x \in]-\pi,\pi[-\{0\}$ 0,5

$g'(0) = -\frac{1}{6}$ 0,75

g' continue sur $]-\pi,\pi[-\{0\}$ 0,25

$\lim_{x\to 0} g'(x) = -\frac{1}{6}$ 0,75 g' continue en 0 0,25

Donc g' continue sur $]-\pi,\pi[$ soit $g \in C^1(]-\pi,\pi[)$ 0,25

Exercice 3 a) Chgt de variable : $u =$ 0,25

$du =$ 0,25

Bornes 0,25+0,25 Calcul 1

b) Impaire 0,5 Calcul 1

c) $\int_0^1 + \int_1^3$ 0,25+0,25

$\int_1^3$ chgt de variables 0,5

Calcul $\int_0^1 + \int_1^3$ 1

2) $G(x) = \int 3\,dx + \int \frac{x}{3+x^2}\,dx - 8\int \frac{dx}{3+x^2}$ 0,5

$= \underset{0,25}{3x} + \underset{0,25}{\frac{1}{2}\ln(3+x^2)} - \underset{0,25}{\frac{8}{3}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{3}}}$

$\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{3}} = \dots = \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$ 1

$G(x) = 3x + \frac{1}{2}\ln(3+x^2) - \frac{8\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$ 0,25