Pour le département de Mathématiques

Université de Tlemcen **Année Universitaire 2015-2016**

Faculté des Sciences **$1^{\text{ère}}$ Année LMD MI**

Epreuve finale d'Algèbre II

Durée 1h30

Exercice 1: Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$, α un réel fixé et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$ par rapport à B.

1) Déterminer la matrice A associée à l'application $g = f \circ f \circ f$.
2) En déduire l'application g.

Exercice 2: Soit B_1, B_2 deux bases de $\mathbb{R}^3$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de B_1 à B_2.

On désigne par a_1, b_1 et c_1 les composantes d'un vecteur V de $\mathbb{R}^3$ par rapport à B_1 et par a_2, b_2 et c_2 ses composantes par rapport à B_2.

Ecrire a_2, b_2, c_2 en fonction de a_1, b_1, c_1.

Exercice 3: Soit $B_1 = \{e_1, e_2\}$ et $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

On pose $e'_1 = (2,-1)$, $e'_2 = (1, 1)$, $u'_1 = (1, 2,-1)$, $u'_2 = (1,-1,1)$, $u'_3 = (0,-2,1)$.

1) Vérifier que $B'_1 = \{e'_1, e'_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que $B'_2 = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que :

   $f(e'_1) = (1,0,0)$ et $f(e'_2) = (-1,2,-2)$.

   Déterminer la matrice M de f par rapport à B'_1 et B'_2.
3) Soit A la matrice de f par rapport aux bases canoniques, P la matrice de passage de B_1 à B'_1 et Q la matrice de passage de B_2 à B'_2.
   a) Exprimer M en fonction de $A,$, P et Q.
   b) En déduire la matrice A.

Barème : Exercice 1 : 5 pts ; Exercice 2: 4 pts ; Exercice 3 : 11 pts.

1^{ere} année LMD M.I

Dépt de Mathématiques

ALGEBRE 2

2015-2016

Corrigé de l'épreuve finale

Exercice 1 : Not : M_f : matrice associé à f.

Rappel : Si $h = f\circ g$ alors $M_h = M_{f\circ g} = M_f \cdot M_g$

1°/ A matrice de $g = f\circ f\circ f$:

$A = M_{f\circ f\circ f} = M_f \cdot M_f \cdot M_f = M^3$. Calculons alors M^3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -1+\cos^2\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est donc la matrice nulle (carrée d'ordre 3)

2°/ Définissons $g = f\circ f\circ f$:

On a $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ car f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Donc
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend right, "g = f\circ f\circ f"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

Rappel : Si $A = M_g$ alors $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $g(X) = A \cdot X$

Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $g(x,y,z) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cl : L'application g est définie par : $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto g(x,y,z) = (0,0,0)$

(app. constante nulle)

Exercice 2 : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrice de passage de B_1 à B_2.

Rappel : Si $V \in \mathbb{R}^3$ et si $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base B_1 et $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans B_2

alors : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ où P est la matrice de passage de B_1 à B_2

ex :
Soit $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ dans B_1 et $V = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ dans B_2.

on a alors $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ car P matrice de passage de B_1 à B_2

Alors : $P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = P^{-1}.P \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $\quad (P^{-1}.P = I)$

Déterminons P^{-1} : Si $\det P \neq 0$ alors $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot {}^t(\text{co}P)$.

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \left| \quad \right| + 1. \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) + (-2-6) = -9 \neq 0$$

$$\text{co}P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et donc } {}^t\text{co}P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t(\text{co}P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{3}{9} & \frac{3}{9} \\ 8/9 & 1/9 & -2/9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

Ceci veut dire
$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{9} a_1 - \frac{1}{9} b_1 + \frac{2}{9} c_1 \\ b_2 = -\frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} b_1 + \frac{1}{3} c_1 \\ c_2 = 8/9\, a_1 + \frac{1}{9} b_1 - \frac{2}{9} c_1 \end{cases}$$

Exercice 3 :

1°/ $\text{Card}\, B'_1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc pour montrer que B'_1 est une base de $\mathbb{R}^2$ il suffit de montrer soit que B'_1 est libre soit qu'elle est génératrice. Vérifions que B'_1 est libre. On peut pour cela vérifier que le $\text{rang}\{e'_1, e'_2\} = 2$. (en utilisant le th. de GAUSS)

$$\text{rg}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} e'_1 & e'_2 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\end{array} = \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{car}}{=} 2 \quad (\text{car } -3 \neq 0)$$

Rappel : Le $\text{rang}\{u_i\}$ ne change pas si on remplace un vect. u_k par une c.L $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i u_i$ avec $\alpha_k \neq 0$.

B'_1 est donc une base de $\mathbb{R}^2$. (Autre manière : $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i e'_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$)

Même raisonnement pour B'_2 de $\mathbb{R}^3$

$$\text{rg}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\end{array} \underset{b' = a - b}{\overset{}{=}} \text{rg}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} a & b' & c \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\end{array} \underset{c' = 2b' + 3c}{=} \text{rg}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} a & b' & c' \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & \underset{\neq 0}{\boxed{-1}} \end{pmatrix}\end{array} = 3$$

donc B'_2 est une base de $\mathbb{R}^3$; (Autre manière : $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i u'_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$)

2°/ Rappel : $M = M_f(B'_1, B'_2) \underset{\text{cours}}{=} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} f(e'_1) & f(e'_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{array} \end{array}$ où $f(e'_1) = \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3$, $f(e'_2) = \beta_1 u'_1 + \beta_2 u'_2 + \beta_3 u'_3$

On a i) : $f(e'_1) = (1,0,0) = \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3 =$

$= \alpha_1(1,2,-1) + \alpha_2(1,-1,1) + \alpha_3(0,-2,1)$

$= (\alpha_1 + \alpha_2 , 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 , -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$

Donc $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$

ii) $f(e'_2) = (-1,2,-2) = \beta_1 u'_1 + \beta_2 u'_2 + \beta_3 u'_3 = (\beta_1 + \beta_2 , 2\beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3 , -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$

Donc $\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = -1 \\ 2\beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3 = 2 \\ -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -1 - \beta_2 \\ \beta_1 - \beta_3 = 0 \\ \beta_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -2 \\ \beta_3 = 1 \end{cases}$ $\underline{\text{cl}}$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (suite)

3°/ a) On a

$$\begin{tikzcd}
\overset{B'_1}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}^2}", "M_{Id}(B'_1,B_1)"'] & \overset{B_1}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f", "M_f(B_1,B_2)"'] & \overset{B_2}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}^3}", "MI_{d_{\mathbb{R}^3}}(B_2,B'_2)"'] & \overset{B'_2}{\mathbb{R}^3}
\end{tikzcd}$$

c.à.d

$$\begin{tikzcd}
\overset{B'_1}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}^2}", "P"'] & \overset{B_1}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f", "A"'] & \overset{B_2}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}^3}", "Q^{-1}"'] & \overset{B'_2}{\mathbb{R}^3}
\end{tikzcd}$$

Car $M_{Id_{\mathbb{R}^3}}(B'_2, B'_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_3 & \\ & & & u'_1 \\ & & & u'_2 \\ & & & u'_3 \end{array}\right)$ = matrice de passage de B'_2 à B_2 $= Q^{-1}$

et $M_{Id_{\mathbb{R}^2}}(B'_1, B_1) = \left(\begin{array}{cc|c} e'_1 & e'_2 & \\ & & e_1 \\ & & e_2 \end{array}\right)$ = matrice de passage de B_1 à B'_1 $= P$

et $M_f(B_1, B_2) = A$ = matrice de f par rapport aux bases canoniques

Donc

$$\begin{tikzcd}
\overset{B'_1}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}^2}", "P"'] \arrow[rrr, bend right, "Id_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ Id_{\mathbb{R}^2} = f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f", "A"'] & \overset{B_2}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}^3}", "Q^{-1}"'] & \overset{B'_2}{\mathbb{R}^3}
\end{tikzcd}$$

de matrice $M_f(B'_1, B'_2) = M$

Ceci veut dire $M = M_{Id_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ Id_{\mathbb{R}^2}} = M_{Id_{\mathbb{R}^3}} \cdot M_f(B_1, B_2) \cdot M_{Id_{\mathbb{R}^2}}$

$$\boxed{M = Q^{-1} . A . P}$$

b/ $M = Q^{-1} A \cdot P \Rightarrow QM = QQ^{-1}AP = AP \Rightarrow \underbrace{QMP^{-1}} = APP^{-1} = \underbrace{A}$

c.à.d $\boxed{A = Q.M.P^{-1}}$

On a P = matrice de passage de B_1 à B_2 c.a.d $P = \left(\begin{array}{cc|c} e'_1 & e'_2 & \\ 2 & 1 & e_1 \\ -1 & 1 & e_2 \end{array}\right)$

Q : matrice de passage de B_2 à B'_2 c.à.d $Q = \left(\begin{array}{ccc} u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Calculons P^{-1} : $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^t(\text{co}P)$. $\det P = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2/3 & 4/3 \\ -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$