Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques- 1ère Année LMD-MI –AU 2015/2016-

Examen Final -Analyse 1 -

Les livres et documents sont interdits, **ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.**

Chacune de vos réponses doit être justifiée et argumentée.

Exercice 1 : Questions de cours (5pts)

Soit $f \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall \, x \, , \, x' \in \mathbb{R} \quad : \qquad f(x + x') = f(x) + f(x')$

1) Calculer $f(0)$ et en déduire que f est impaire. **(1 pt + 1 pt)**

2) Montrer par récurrence que $\forall \, x \in \mathbb{R}$ et $\forall \, n \in \mathbb{N} : f(n\,x) = n\,f(x)$ **(1pt)**

3) En utilisant la définition de la continuité d'une fonction en un point x_0, montrer que :

si la fonction f est continue en $x_0 = 0$, alors elle est continue en tout point $x \in \mathbb{R}$. **(2pts)**

Exercice 2 (6,5pts) :

I) On considère les suites (U_n) et (V_n) des nombres réels définies pour $n \geq 1$ par :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad V_n = U_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes. **(2pts)**

II) On considère la suite (U_n) des nombres réels définies pour $n \geq 1$ par : $U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$

1) Montrer que la suite (U_n) est monotone et que pour tout $n \geq 1$: $\frac{1}{2} \leq \; U_n < 1$ **(1,5pts + 1,5pts)**

2) En déduire que la suite (U_n) est convergente. **(0,5pt)**

3) On note $\mathbf{L} = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. Peut-on avoir $\mathbf{L} \geq 1$? **(1pt)**

Exercice 3 (7,5pts):

I) Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 4\cos(x)}{2x^3}$; **2)** $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$; **3)** $\lim_{x \to 0} \frac{-1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$ **(1pt + 1,5pt + 1pt)**

II) Soit la fonction $f : \; \mathbb{R} \backslash \{-1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ - $\frac{2}{1-x^2}$ et $f(1) = \alpha$.

a) Déterminer α pour que f soit continue au point $x = 1$ **(2pts)**

b) Peut-on prolonger par continuité la fonction f au point $x = -1$? **(2 pts).**

NB : 1 point est attribué à une copie bien présentée.

- Corrigé Succint - Examen final - Analyse 1 -
(LMD - MI)

I

Exercice 1 (Questions de cours : 5 pts)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x+x') = f(x) + f(x')$ $\forall x, x' \in \mathbb{R}$

1°) pour $x = 0$ et $x' = 0$: $f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ 1pt

2°) $x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$: $f(x+(-x)) = f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x)$

$\Rightarrow f$ est impaire 1pt

2°) on remarque $f(0.x) = 0 = 0.f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(1.x) = 1.f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

supposons que pour n : $f(nx) = nf(x)$

Alors $f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(nx) = nf(x)$ 1pt

3°) on suppose que f est continue en 0, c'est-à-dire $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \iff$

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists \delta > 0$: $0 < |x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$ (car $f(0) = 0$)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |\underbrace{x - x'}_{y}| \leq \delta \Rightarrow |f(\underbrace{(x - x')}_{y})| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ 2pts

pour x fixé, ceci veut dire que f est continue en x

Exercice 2 (6,5 pts)

I/ pour $n \geq 1$: $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et $V_n = U_n + \frac{1}{n}$.

pour $n \geq 1$.

• $U_{n+1} - U_n = \left[1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}\right] - \left[1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0 \Rightarrow (U_n)_n$ est croissante 0,5pt

•• $V_{n+1} - V_n = \left(U_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(U_n + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-n-1}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$

$\Rightarrow (V_n)_n$ est decroissante 1pt

∴ $V_n - U_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n - U_n = 0$ 0,5pt

$\Rightarrow (U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont adjacentes

II/ pour $n \geq 1$

1/ $U_{n+1} - U_n = \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \right] - \left[\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right] = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{2(n+1) + (2n+1) - 2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0 \Rightarrow (U_n)$ st croissante (1,5 pt)

/ on remarque que pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$

d'où $\underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ fois}} \leq \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{n}{2n} \leq U_n < \frac{n}{n+1} < 1$.

$\Rightarrow \forall n \geq 1 \quad \frac{1}{2} \leq U_n < 1$. (1,5 pt)

$(U_n)_n$ croissante et majorée donc convergente (0,5 pt)

3/ on note $L = \lim_{n \to \infty} U_n$

* on peut avoir $L = 1$ (car pour $V_n = 1 - \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} V_n = 1$) (0,5 pt)

** on ne peut pas avoir $L > 1$, en effet (— 1 — L —

si $L > 1$ posons $\varepsilon = L - \left(\frac{L+1}{2}\right) = \frac{L-1}{2} > 0$

$\varepsilon = \frac{L-1}{2} > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N : L - \varepsilon \leq U_n \leq L + \varepsilon \Rightarrow \frac{L+1}{2} \leq U_n \leq \frac{3L-1}{2}$

$\Rightarrow n \geq N : \quad U_n \geq \frac{L+1}{2} > 1$ absurde (0,5 pt)

Exercice 3 (7,5 pts)

1/ On remarque $0 \leq \left| \frac{4\cos x}{2x^3} \right| \leq \left| \frac{2}{x^3} \right| \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{4\cos x}{2x^3} = 0$

d'où $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 4\cos x}{2x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2} + \frac{2\cos}{x^3} = \frac{3}{2}$ (1 pt)

2/ $\frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} \underset{x \neq 1}{=} (x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)$

d'où $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2+x+1)(\sqrt{x}+1) = 6$. (1,5 pts)

3/ $x \neq 0$: $\frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - 1)(\sqrt{x^2+x+1} + 1)}{x(\sqrt{x^2+x+1} + 1)} = \frac{x^2 + x}{x(\sqrt{x^2+x+1} + 1)} = \frac{1+x}{\sqrt{x^2+x+1} + 1}$

$\Rightarrow \lim \frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1}{} = \lim \frac{1+x}{} = \frac{1}{}$ (1 pt)

TDI

II / $f : \mathbb{R}-\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ et $f(1) = \alpha$

a) f continue au point $x = 1 \iff \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \alpha = f(1)$.

Calculons $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

en effet $x \neq 1$ $\quad f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{(1+x)-2}{1-x^2} = \frac{x-1}{(1-x)(x+1)} = -\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x+1}$

d'où

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{2}$. Ainsi $\alpha = -\frac{1}{2}$

2 pts

b) Pour que f soit prolongeable par continuité en $x=-1$ il faut et il suffit que

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ existe.

Cherchons $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} -\frac{1}{x+1}$ n'existe pas.

Donc f n'est pas prolongeable par continuité au point $x = -1$.

2 pts