



Epreuve Finale de Mécanique

Questions de cours (6pts)

- I) Enoncer et démontrer la deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique P.F.D).
II) Vérifier que la force du rappel d'un ressort de constante de raideur « k » est une force conservative.
III) Répondre par vrai ou faux :
1. Le coefficient du frottement dynamique est plus important que le coefficient du frottement statique.
 2. La quantité du mouvement d'un système de particules libres varie en fonction du temps.
 3. Si une force est conservative, elle dérive d'un potentiel.
 4. Le travail d'une force non conservative est une grandeur indépendante du chemin suivi.
 5. En présence du frottement, l'énergie mécanique est conservée.
 6. La variation de l'énergie potentielle entre le point de départ et le point d'arrivée égale aux travaux des forces conservatives entre ces deux points.

EXERCICE 1:(8pts)

Soit le repère fixe $R(Oxyz)$ où le point O' se déplace sur l'axe (Oy) avec une accélération constante γ . On lie à O' le repère $(O'XYZ)$ qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Un point mobile M se déplace sur l'axe $O'X$ avec une vitesse constante v_0 .

A l'instant $t=0$, l'axe $(O'X)$ est confondu avec (Ox) et M est en point O .

Calculer dans le repère mobile :

- 1- La vitesse relative $\vec{v}_r$ et la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$, en déduire la vitesse absolue $\vec{v}_a$.
- 2- L'accélération relative $\vec{a}_r$, l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c$, en déduire l'accélération absolue $\vec{a}_a$.

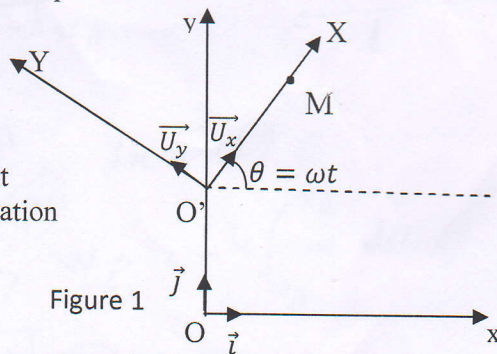


Figure 1

EXERCICE 2 :(6pts)

Une particule de masse m est lâchée en A d'une gouttière sans vitesse initiale (figure 2).

- 1- Calculer la vitesse v_B de la particule au point B.
- 2- Exprimer h en fonction de r et θ .
- 3- Calculer la vitesse v_C de la particule au point C en fonction de h et v_B .
- 4- Donner l'expression de la réaction R en fonction de m , r , θ , v_B , et g .
- 5- Démontrer que la vitesse minimale que doit acquérir la particule au point B pour atteindre le point S est $v_{B,min} = 2\sqrt{gr}$.
- 6- En prenant $v_{B,min}$ la vitesse au point B, calculer la réaction au point B et S. Pour quel angle le corps quitte-t-il la gouttière.

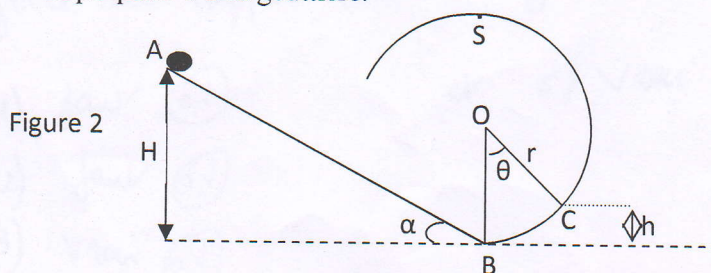


Figure 2

Bon courage

Corrigé de l'épreuve finale Mécanique

Questions de cours: (6 pts)

I) 1) Deuxième Loi de Newton:

La dérivée de la quantité de mouvement s'appelle force (0,2)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

2) P.F.D:

on a $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ et $\vec{p} = m\vec{v}$ donc $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

Si $m = \text{const}$ $\Rightarrow \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$ (0,2)

d'où $\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}}$ (0,2)

II) La force de rappel d'un ressort de constante de raideur "k" est une force conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi.

donc $x = l - l_0$

① $\vec{F}_r = -kx\vec{u}$ (0,2)

on a $dW_{\vec{F}_r} = \vec{F}_r \cdot d\vec{l}$ avec $d\vec{l} = dx\vec{u}$ (0,2)

① et ② $\Rightarrow dW_{\vec{F}_r} = -kx \cdot dx \Rightarrow W_{\vec{F}_r} = -k \int_{x_A}^{x_B} x \cdot dx$

$\Rightarrow \boxed{W_{\vec{F}_r} = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)}$ (0,2)

Le travail de la force de rappel ne dépend pas du chemin suivi, il dépend que le pr de départ (x_A) et le pr d'arrivée (x_B) donc La force de rappel est une force conservative.

III)

et 6) vrai (0,2)

1) faux (0,2)

2) faux (0,2)

3) vrai (0,2)

4) faux (0,2)

5) faux (0,2)

Exercice 01 (08pts)

$$\begin{cases} \vec{OO'} = \frac{1}{2} \gamma t^2 \vec{f} & (0,5) \\ \vec{O'M} = v_0 t \vec{u}_x & (0,5) \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} \vec{\omega} = \omega \vec{u}_3 = \omega \vec{u}_z & (0,25) \\ \theta = \omega t & (0,25) \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} \vec{u}_x = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{u}_y = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases} \quad (0,25)$$

$$1) \vec{v}_r = \frac{d\vec{O'M}}{dt} / R' = v_0 \vec{u}_x \quad (0,5)$$

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} / R + (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M}) / R' = \gamma t \vec{f} + \omega \vec{u}_3 \wedge v_0 t \vec{u}_x \quad (0,25)$$

$$= \gamma t \vec{f} + \omega v_0 t (\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_x) = \gamma t \vec{f} + \omega v_0 t \vec{u}_y \quad (0,25)$$

$$\text{avec } \vec{f} = \sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \quad (0,5)$$

$$\text{donc } \vec{v}_e = (\gamma t \sin \theta + \omega v_0 t) \vec{u}_x + (\gamma t \cos \theta + \omega v_0 t) \vec{u}_y \quad (0,5)$$

$$\text{Déduire } \vec{v}_a : \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = (\gamma t \sin \theta + v_0) \vec{u}_x + (\gamma t \cos \theta + \omega v_0 t) \vec{u}_y \quad (0,5)$$

$$2) \vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} / R' = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_r = \vec{0} \quad (0,5)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{O'M}}{dt}$$

$$= \gamma \vec{f} + \vec{\omega} \wedge (\omega v_0 t \vec{u}_y) = \gamma \vec{f} + \omega \vec{u}_3 \wedge (\omega v_0 t) \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{a}_e = \gamma \vec{f} + \omega^2 v_0 t (-\vec{u}_x) \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_e = (\gamma \sin \theta - \omega^2 v_0 t) \vec{u}_x + \gamma \cos \theta \vec{u}_y \quad (0,5)$$

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2 \omega \vec{u}_3 \wedge v_0 \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \vec{a}_c = 2 \omega v_0 \vec{u}_y \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}_r \quad (0,25)$$

$$= (\gamma \sin \theta - \omega^2 v_0 t) \vec{u}_x + (\gamma \cos \theta + 2 \omega v_0) \vec{u}_y$$

$$\text{donc } \vec{a}_a = (\gamma \sin \theta - \omega^2 v_0 t) \vec{u}_x + (\gamma \cos \theta + 2 \omega v_0) \vec{u}_y \quad (0,5)$$

Exercice 021

1) Calcul de la vitesse U_B :

$$E_T(A) = E_T(B) \text{ (pas de frottement)}$$

$$\text{donc } E_C(A) + E_P(A) = E_C(B) + E_P(B)$$

$$\text{ou } \Delta E_C = \Delta E_P \text{ d'où } \frac{1}{2} m U_B^2 - \frac{1}{2} m U_A^2 = m g H$$

$$\Rightarrow U_B = \sqrt{2 g H}$$

2) Expression de $h = f(r, \theta)$: on a $h = r - r \cos \theta \Rightarrow h = r(1 - \cos \theta)$

3) Calcul de la vitesse $U_C = f(h, U_B)$:

$$E_T(C) = E_T(B) \text{ (pas de frottement) ou } \Delta E_T = 0$$

$$\text{donc } \Delta E_C = \Delta E_P \Rightarrow \frac{1}{2} m U_C^2 - \frac{1}{2} m U_B^2 = -m g h$$

$$\Rightarrow U_C = \sqrt{-2 g h + U_B^2}$$

4) La réaction $R = f(m, r, \theta, U_B, g)$

$$\text{P.F.D } \vec{R} + \vec{P} = m \vec{a}$$

$$\begin{cases} \text{O.T.B} - m g \sin \theta = 0 \\ \text{O.N.B} R - m g \cos \theta = m a_N = m \frac{U_C^2}{r} = \frac{m}{r} (U_B^2 - 2 g h) \end{cases}$$

$$h = r(1 - \cos \theta) \Rightarrow R = 3 m g \cos \theta - 2 m g + \frac{m}{r} U_B^2 \quad (1)$$

5) Pour que la particule atteigne le point "S" avec une vitesse nulle il faut qu'elle ait acquis au pt "B" une vitesse minimale qui vérifie l'équation

$$\frac{1}{2} m U_S^2 - \frac{1}{2} m U_B^2 = -m g (2r) \Rightarrow U_{B, \min} = \sqrt{4 g r}$$

6) La réaction au pt (B) et (S):

a) Au pt (B): $\theta = 0, h = 0$ d'où

$$R_B = 3 m g \cos 0 - 2 m g + \frac{m}{r} U_{B, \min}^2 \Rightarrow R_B = 5 m g$$

b) Au pt (S): $\theta = \pi, h = 2r$ d'où

$$R_S = 3 m g \cos \pi - 2 m g + \frac{m}{r} U_{B, \min}^2 = -3 m g - 2 m g + \frac{m}{r} 4 g r \Rightarrow R_S = -m g$$

c) la particule quitte la gouttière si $R \geq 0$

$$\begin{aligned} & 3 m g \cos \theta - 2 m g + \frac{m}{r} 4 g r = 0 \\ & \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 132^\circ \end{aligned}$$

