

Examen Final
Durée 1h30'

Exercice 1 : Soient les applications f et g définies par

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} \\ x \longmapsto x & g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto x \end{array}$$

- 1) f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier. (Sans l'utilisation de la dérivée)
2) Déterminer, si elles existent, les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 : Soit

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[\\ x \longmapsto f_m(x) = (m-1)^2 x^2 + 1 \end{array}$$

- 1) Discuter suivant les valeurs de m l'injectivité de f_m . (Sans l'utilisation de la dérivée)
2) Discuter suivant les valeurs de m la surjectivité de f_m . (" " "
3) En déduire les valeurs de m pour lesquelles f_m est bijective et déterminer dans ce cas l'application f_m^{-1} .

Exercice 3 : Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, on définit la loi $*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad x * y = |x| + |y|$$

- 1) $*$ est-elle associative ? commutative ? admet-elle un élément neutre ? Justifier
2) $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ? Justifier.

Exercice 4 : Soit $(G, *)$ un groupe commutatif d'élément neutre e et soit $a \in G$. Soit

$$F_1 = \{e\}, \quad F_2 = \{x \in G, \exists y \in G, x = a * x * y\}$$

Déterminer si F_1 et F_2 sont des sous-groupes de G .

Barème : Exercice 1 : 3pts ; Exercice 2 : 7pts ; Exercice 3 : 4pts Exercice 4 : 6pts.

Corrigé de l'examen finalExercice 1 : $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$ $x \mapsto x$ 1/ a) Déf: f injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in \mathbb{R}^+, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ Soient $x, x' \in \mathbb{R}^+, f(x) = x$ et $f(x') = x'$.Donc: $\forall x, x' \in \mathbb{R}^+, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ $\mathcal{U}$: f injectiveb) Déf: f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$
 $f: E \rightarrow F$ Soit $y \in \mathbb{R}$. $y = f(x) \Leftrightarrow y = x$. A.t-on $\forall y \in \mathbb{R}, \underset{(\text{y})}{x \in \mathbb{R}^+}$?Non: En effet: $\exists y < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+, y \neq x$ (Négation de f surj) $\mathcal{U}$: f non surjective.c) f non surjective donc f non bijective2/ a) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:a) L'ens d'arrivée de f est égal à l'ens de départ de g , on peut donc définir l'application $g \circ f$ par:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\
 x & \mapsto & x \mapsto x \\
 \underbrace{\hspace{10em}} & & \uparrow \\
 & & g \circ f
 \end{array}$$

$$g \circ f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = x$$

$$\text{c.a.d } g \circ f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x$$

$$\text{Rem: } g \circ f = f.$$

$$(\text{Normal car } g = \text{Id}_{\mathbb{R}})$$

b) L'ens de destination de g est différent de l'ens de départ de f et donc il est impossible de définir $f \circ g$.

Exercice 2: $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[$

$$x \longmapsto f_m(x) = (m-1)^2 x^2 + 1$$

1° f_m inj $\Leftrightarrow \forall x, x' \in \mathbb{R}^+ \quad f_m(x) = f_m(x') \Rightarrow x = x'$

Soient $x, x' \in \mathbb{R}^+$, $f_m(x) = f_m(x') \Rightarrow (m-1)^2 x^2 + 1 = (m-1)^2 x'^2 + 1$

$$\Rightarrow (m-1)^2 (x^2 - x'^2) = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(x-x')(x+x') = 0 \quad (*)$$

i) $m = 1$: $(*) \Leftrightarrow 0 = 0$ (Donc x, x' q'ques) et alors f non inj

(ou Rem: $m = 1$: $f_m(x) = 1 = c^te$: (non injective) $\forall x, x' \quad f(x) = f(x') = 1$)

ii) $m \neq 1$: $(*) \Rightarrow (x-x')(x+x') = 0 \Rightarrow x = x'$ ou $x = -x'$ $x, x' \in \mathbb{R}^+$
 $\Rightarrow x = x'$ impossible

Q: $m = 1$: f non injective
 $m \neq 1$: f injective

Q: f inj.

2° Def: f_m surj $\Leftrightarrow \forall y \in [1, +\infty[$, $\exists x \in \mathbb{R}^+$, $f_m(x) = y$

Soit $y \in [1, +\infty[$. Etudions l'éq $y = f_m(x)$ (d'inconnue x)

$$y = f_m(x) \Leftrightarrow y = (m-1)^2 x^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = (m-1)^2 x^2$$

a) Si $(m-1)^2 \neq 0$ c-à-d si $m \neq 1$ alors: $(y-1) = (m-1)^2 x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y-1}{(m-1)^2}$ ($y > 1$)

c-à-d $x = \pm \sqrt{\frac{y-1}{(m-1)^2}}$. Comme on cherche $x \in \mathbb{R}^+$ on a:

$$y = (m-1)^2 x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y-1}{(m-1)^2}} \geq 0 \quad \left(x = \frac{\sqrt{y-1}}{|m-1|} \right)$$

Q₁: Cas où $m \neq 1$: $\forall y \in [1, +\infty[$, $\exists x = \sqrt{\frac{y-1}{(m-1)^2}} \in \mathbb{R}^+$, $y = f_m(x)$

c-à-d si $m \neq 1$ alors f_m surjective.

b) Si $m = 1$ alors: $y = f_m(x) \Leftrightarrow y = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

donc $\forall y \in]1, +\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $y \neq f_m(x)$ (car $f_m(x) = 1$)

Q₂: Si $m = 1$ alors f_1 non surjective

exercice 2 (suite)

Résumé de la 2^e question :

$\boxed{m=1}$: f ni injective, ni surjective et alors f non bijective

$\boxed{m \neq 1}$: f est injective et surjective et alors f est bijective

$$m \neq 1 : f_m^{-1} ? \quad f_m^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ y \longmapsto x \text{ tq}$$

$$f_m^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f_m(x)$$

$$\text{cà.d. } f_m^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ y \longmapsto f_m^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-1}{(m-1)^2}}$$

$$\text{lk } f_m^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto f_m^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(m-1)^2}}$$

exercice 3: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x * y = |x| + |y|$

a) Associativité: Soient $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$

$$(x * y) * z = (|x| + |y|) * z = |x| + |y| + |z| = |x| + |y| + |z|$$

$$x * (y * z) = x * (|y| + |z|) = |x| + |y| + |z| = |x| + |y| + |z| = (x * y) * z$$

est donc associative

Commutativité: oui $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x * y = |x| + |y| = |y| + |x| = y * x$

Élément neutre? A-t-on $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x$?

*commutative : cherchons donc e à droite (par ex)

$$x * e = x \Leftrightarrow |x| + |e| = x \begin{cases} \Leftrightarrow x + |e| = x & \text{si } x \geq 0 \\ \Leftrightarrow -x + |e| = x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |e| = 0 \\ |e| = 2x \end{cases}$$

← On peut dire à partir de là : e n'existe pas

car e non unique $\Rightarrow e$ n'est pas neutre)

∴ 3

Q: l'élément neutre n'existe pas (pour la loi $*$)

2°/ Déf de groupe: $(G, *)$ groupe $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} * \text{ l.c.i. dans } G & \textcircled{1} \\ * \text{ associative} & \textcircled{2} \\ \text{il existe un élt neutre } e & \textcircled{3} \\ \forall x \in G, \exists ! x' \in G, x * x' = x' * x = e & \textcircled{4} \end{cases}$

Oua: la condition $\textcircled{3}$ n'est pas vérifiée dans $(\mathbb{R}, *)$.
donc $(\mathbb{R}, *)$ n'est pas un groupe.

Exercice 4: $(G, *)$ groupe d'élt neutre e . $a \in G$.

1° $F_1 = \{e\}$? Déf de sous groupe

$F \subset G$ sous groupe de $G \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } F \neq \emptyset \\ \text{et} \\ \text{ii) } \forall x, y \in F, x * y \in F \end{cases}$

1° F_1 ? Oua déjà i) $e \in F_1$ par déf

ii) Soit $e = x$ et $y = e \in F_1$: $e * e' = e * e$ car $e' = e$ (cours)
 $= e$ (Déf d'élt neutre)
 $\in F_1$ d'où ii)

Q: F_1 est un sous-groupe de $(G, *)$

2° $F_2 = \{x \in G, \exists y \in G, x = a * x * y\}$ $\begin{cases} \text{Rem: } F_2 = G \\ \forall x \in G: x = a * x * a' \text{ car } x' a' x = y \end{cases}$

i) Soit a' le sym. de a dans G c-à-d $a * a' = a' * a = e$

Oua: $e = a * a' * e = a * e * a'$ ($*$ comm. ass. ...)

Donc $\exists a' \in G, e = a * e * a'$ c-à-d $e \in F_2$ et d'où $F_2 \neq \emptyset$

ii) Soit $x \in F_2$ et $z \in F_2$. Est-ce que $x * z' \in F_2$.

$x \in F_2 \Leftrightarrow \exists y_1 \in G: x = a * x * y_1$

$z \in F_2 \Leftrightarrow \exists y_2 \in G: z = a * z * y_2$

$z' = (a * z * y_2)' = y_2' * z' * a'$ car: cours dit $(a * b)' = b' * a'$

Oua alors: $x * z' = (a * x * y_1) * (y_2' * z' * a')$
 $= a * (x * z') * (y_1 * y_2' * a')$, $*$ comm. ass.

al: $\exists y = y_1 * y_2' * a'$ $x * z' = a * (x * z') * y \in F_2$ d'où ii). (G groupe)
D. i) et ii) $\Rightarrow F_1$ et F_2 sont des sous-groupes