Université de Tlemcen

Année 2015-16

Contrôle continu de Statistiques MI

Exercice 1 : Soit X la variable statistique qui représente le nombre d'enfants par famille d'un quartier de Tlemcen.
Les valeurs prises par X sont données par le tableau

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	4	15	29	18	10	4

1) Dresser le tableau représentant $x_i, n_i, f_i, N_i, F_i, n_i x_i, n_i x_i^2$
2) Determiner le mode M_0 et calculer $\bar{x}$ et σ_X
3) Determiner la fonction de répartition $F_X(x)$ et en déduire la médiane M_e et les quartiles Q_1 et Q_3

Exercice 2 : Soit X la variable statistique continue représentant le quotient intellectuel de 100 enfants.

75	75	76	76	76	77	77	79	80	80	80	82	82	82	82
82	83	83	84	84	84	85	85	85	85	86	86	86	87	87
88	88	88	89	89	89	90	90	90	90	90	90	90	90	90
90	91	91	91	91	91	91	91	92	92	92	92	92	92	92
93	93	93	93	94	94	96	96	96	96	96	96	97	98	98
98	98	98	98	98	99	99	100	100	100	100	102	103	104	104
104	105	105	105	106	107	110	110	110	113					

1) partager les données en classes de longueur $h = 8$
2) Dresser le tableau $C_i, c_i, n_i, f_i, N_i, F_i, f_i c_i, f_i c_i^2$
3) Tracer l'histogramme des effectifs partiels
4) Determiner $\bar{x}$ et σ_X et tracer la courbe cumulative des fréquences
5) Déterminer la médiane M_e

Exercice 3 : (Q.C)

1) Que représente la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3 d'une série statistique discrète composée de données classées par ordre croissant d'une population de 51 individus ?
2) Définir les moyennes marginales et les variances marginales et $cov(X,Y)$ d'une variable statistique $Z=(X,Y)$ donnée
   a) sous forme d'un nuage de points
   b) sous forme de loi

Barème : Ex 1 : 7pts Ex 2 : 7pts Ex 3 : 6pts

Corrigé du contrôle continu de Stat.

Ex 1 1) X est une v.s. discrète d'où le tableau

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	4	15	29	18	10	4
f_i	0,05	0,19	0,36	0,23	0,13	0,05
F_i	0,05	0,24	0,6	0,83	0,96	1
$n_i x_i$	0	15	58	54	40	20
$n_i x_i^2$	0	15	116	162	160	100

2,5

0,5

2) le mode $M_0 = x_3 = 2$ $\quad (n_3 = \max n_i = 29)$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i = \frac{1}{80}(15+58+54+40+20) = \frac{187}{80} = 2,34$$ 0,5

$$Var(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{80}(15+116+162+160+100) - (2,34)^2$$

$Var(X) = 1,41$ d'où $\sigma_X = \sqrt{1,41} = 1,2$ 1

3) $F_X(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow F_X(x) =$ proportion $\left(\frac{\%}{100}\right)$ des individus tq $X(\omega) \leq x$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,05 = F_1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,24 = F_2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,6 = F_3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0,83 = F_4 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0,96 = F_5 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

1,5

$M_e = x_3 = 2$ car $F_2 = 0,24 < 0,5$ et $F_3 = 0,6 \geq 0,5$

$Q_1 = x_3 = 2$ car $F_2 = 0,24 < 0,25$ et $F_3 = 0,6 \geq 0,25$

$Q_3 = x_4 = 3$ car $F_3 = 0,6 < 0,75$ et $F_4 = 0,83 \geq 0,75$

1,5

Ex2 1) $x_{max} - x_{min} = 113 - 75 = 38$

d'où un partage en 5 classes de longueur $h = 8$

$C_1 = [a_0, a_1[= [75, 83[$ $\quad$ $C_2 = [a_1, a_2[= [83, 91[$

$C_3 = [a_2, a_3[= [91, 99[$ $\quad$ $C_4 = [a_3, a_4[= [99, 107[$ $\quad$ 1

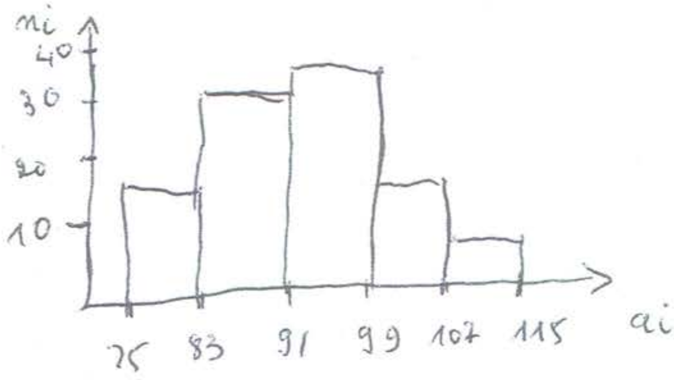
$C_5 = [a_4, a_5[= [107, 115[$.

2)

C_i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
c_i	79	87	95	103	111
n_i	16	30	34	15	5
f_i	0,16	0,3	0,34	0,15	0,05
N_i	16	46	80	95	100
F_i	0,16	0,46	0,8	0,95	1
$f_i c_i$	12,64	26,1	32,3	15,45	5,55
$f_i c_i^2$	998,56	2270,7	3068,5	1591,35	616,05

1,5

3)



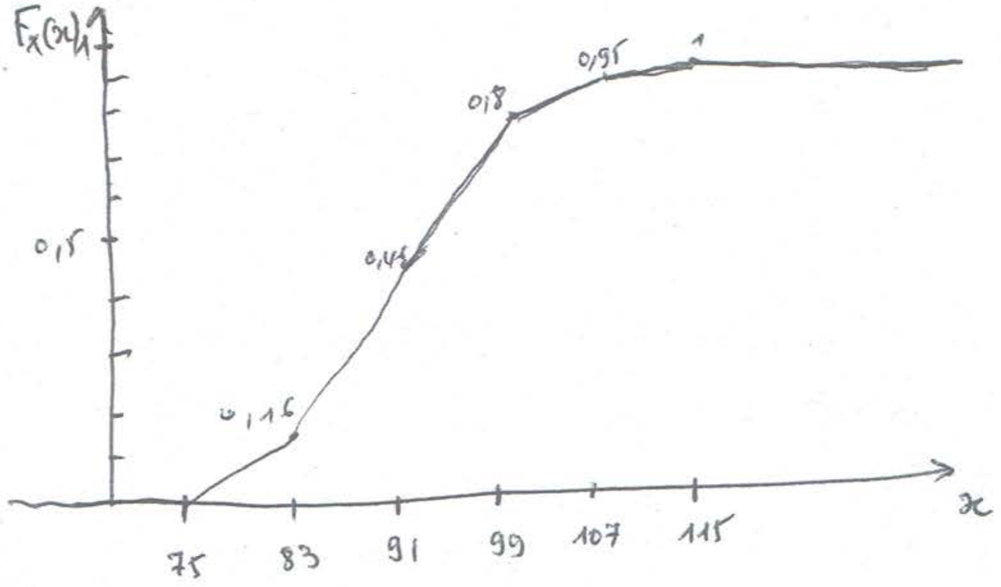
0,5

4) $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} f_i c_i = 12,64 + 26,1 + 32,3 + 15,45 + 5,55$

$\boxed{\bar{x} = 92,04}$ $\quad$ 0,5

$Var(X) = \sum_{i=1}^{5} f_i c_i^2 - \bar{x}^2 = 8545,16 - 8471,36 = 73,8$

d'où $\boxed{\sigma_X = \sqrt{73,8} = 8,59}$ $\quad$ 0,5



1

5) On remarque par le tableau ou la courbe que

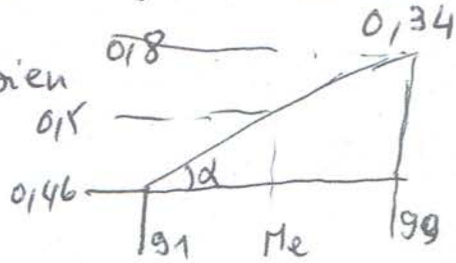
$Me \in C_3 = [91, 99[$ d'où

$F_X(x) = F_2 + \frac{f_3}{h}(x - a_2)$ l'éq. de $F_X(x)$ dans C_3

$F_X(x) = 0,46 + \frac{0,34}{8}(Me - 91) = 0,5$

d'où $Me = \frac{(0,5 - 046) \times 8}{0,34} + 91$ d'où $Me = 91,94$

ou bien



$tg\,\alpha = \frac{F_3 - F_2}{a_3 - a_2} = \frac{f_3}{h} = \frac{0,34}{8}$ 2

$tg\,\alpha = \frac{0,5 - F_2}{Me - a_2} = \frac{0,04}{Me - 91}$

d'où $Me = 91,94$

QC. Ex3

Me représente la 26^{ieme} valeur de X car pour la 25^{ieme} valeur on n'a pas atteint 50% de l'effectif de Ω et pour la 26^{ieme} on l'a atteint et dépassé (1,5)

de même $Q_1 = 13^{ieme}$ valeur et $Q_3 = 39^{ieme}$ valeur

2°) a) les valeurs de $(X,Y) = Z$ sont données sous forme $(X(\omega_i), Y(\omega_i))$ ou (x_i, y_i) $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(\omega_i) \text{ ou } \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad (0,5)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y(\omega_i) \text{ ou } \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X(\omega_i) - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X^2(\omega_i) - \bar{x}^2 \quad (1)$$

$$\mathrm{Var}\, Y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y(\omega_i) - \bar{y})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y^2(\omega_i) - \bar{y}^2 \quad (1)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X(\omega_i) - \bar{x})(Y(\omega_i - \bar{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(\omega_i)Y(\omega_i) - \bar{x}\bar{y}$$

b) les valeurs de $Z = (X,Y)$ sont données sous forme de x_i, y_j, f_{ij} $i = 1, \dots m$; $j = 1, \dots k$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} f_{i\cdot} x_i \quad \text{où } f_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} f_{ij} \quad (0,5)$$

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^{k} f_{\cdot j} y_j \quad \text{où } f_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} f_{ij}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{m} f_{i\cdot}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{m} f_{i\cdot} x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \sum_{j=1}^{k} f_{\cdot j}(y_j - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^{k} f_{\cdot j} y_j^2 - \bar{y}^2 \quad (0,5)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} f_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

(1) pt

(4)

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} f_{ij} x_i y_j - \bar{x}\bar{y}$$

(1)