Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
1ière Année LMD-MI
Année Universitaire 2015/2016
Jeudi: 10/03/2016
Durée : 01 h 30mn

Contrôle Continu d'Électricité

Exercice 1: (6pts)

Trois charges ponctuelles $\mathbf{q_A=+q}$, $\mathbf{q_C=+q}$ et $\mathbf{q_B=+3q}$ sont placées, respectivement aux points A, B et C (Figure 1).

1- Calculer et représenter sur la figure 1, le champ électrique dû à ces trois charges au point O.
2- Quelle est la force électrostatique appliquée sur une charge $\mathbf{q'=-q}$ placée en O.
3- Calculer le potentiel électrostatique au point O.

Exercice 2: (6pts)

Soit un fil (**Ay**) portant une distribution de charges linéaire de densité linéique uniforme positive λ. (Figure 2)

1- Déterminer le champ électrique $\mathbf{E_M}$ produit en un point M par cette distribution continue. On donne **OM=x**.
2- Déduire le champ électrique au point M dans le cas d'un fil infini, et écrire l'expression du potentiel dans ce cas en fonction de x.

Exercice 3: (8pts)

Soit deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 tel que $\mathbf{R_1<R_2}$ et de hauteur h. Le cylindre de rayon R_1 porte une distribution surfacique de densité $\boldsymbol{\sigma_1=\sigma>0}$. De même le deuxième cylindre de rayon R_2 porte une distribution surfacique de densité $\boldsymbol{\sigma_2=2\sigma>0}$. (Figure 3)

1- En utilisant le théorème de Gauss, trouver l'expression du champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace.
2- En déduire l'expression du potentiel électrique V(r) pour $\mathbf{r>R_2}$.

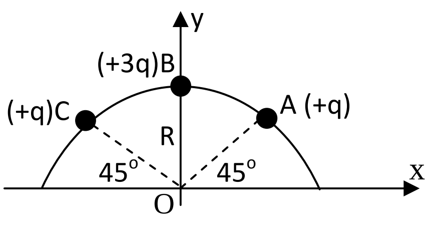


Figure 1

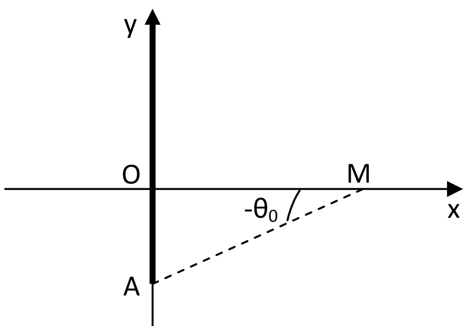


Figure 2

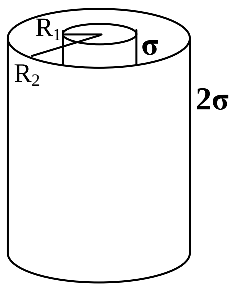


Figure 3

Bon courage

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
1ière Année LMD-MI
Jeudi: 10/03/2016
Durée : 01 h 30mn

Année Universitaire 2015/2016

Corrigé du Contrôle Continu d'Électricité

Exercice 1: (6pts)

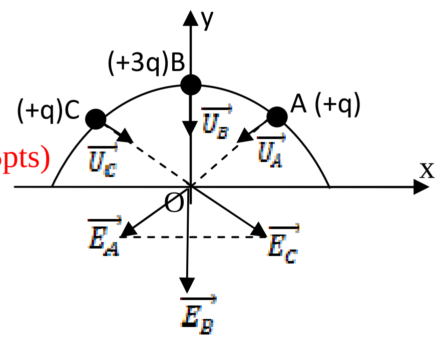
1- **Le champ électrique au point « O » : (4pts)**

$$\overrightarrow{E_o} = \overrightarrow{E_B} + \overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_C} \quad \text{(0.5pts)}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_A} = kq\frac{1}{r_A^2}\overrightarrow{U_A} \\ \overrightarrow{E_B} = k3q\frac{1}{r_B^2}\overrightarrow{U_B} \\ \overrightarrow{E_C} = kq\frac{1}{r_C^2}\overrightarrow{U_C} \end{cases} \quad \text{(0.75pts)}$$

avec $\begin{cases} r_A = r_B = r_C = R \\ \overrightarrow{U_A} = -\cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j} \\ \overrightarrow{U_B} = -\vec{j} \\ \overrightarrow{U_C} = \cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j} \end{cases}$ (01 pts)

(0.5pts)



on à $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où $\begin{cases} \overrightarrow{U_A} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j}) \\ \overrightarrow{U_B} = -\vec{j} \\ \overrightarrow{U_C} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{j}) \end{cases}$ donc $\begin{cases} \overrightarrow{E_A} = -kq\frac{1}{R^2}\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j}) \\ \overrightarrow{E_B} = -k3q\frac{1}{R^2}\vec{j} \\ \overrightarrow{E_C} = kq\frac{1}{R^2}\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{j}) \end{cases}$ (0.75pts)

$$\overrightarrow{E_o} = \overrightarrow{E_B} + \overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_C} = -kq\frac{(\sqrt{2}+3)}{R^2}\vec{j} \quad \text{(0.5pts)}$$

2- **Le force électrostatique au point « O » (01pts):**

avec $q_o = q' = -q$

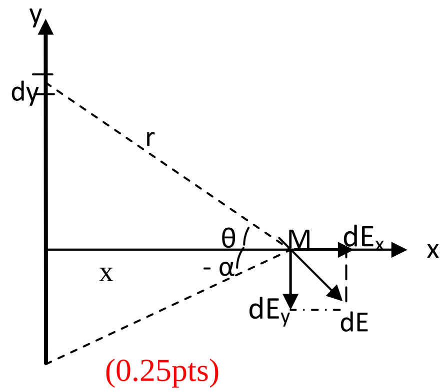
$$\overrightarrow{F_o} = q'\overrightarrow{E_o} = -qE_o = kq^2\frac{(\sqrt{2}+3)}{R^2}\vec{j} \quad \text{(01pts)}$$

Le potentiel au point « O » : (01pts)

$$V_o = V_A + V_B + V_C \quad \text{(0.25pts)}$$
$$= kq\frac{(1+1+3)}{R} \quad \text{(0.25pts)}$$
$$\Rightarrow V = 5kq\frac{1}{R} \quad \text{(0.5pts)}$$

<u>Exercice 2</u> : 6pts

1-Le champ électrique E en M.



$$\begin{cases} \overrightarrow{dE} = k\dfrac{dq}{r^2}\vec{U} \text{ (0.25pts)} \\ dq = \lambda dy \text{ (0.25pts)} \\ \vec{U} = cos\theta\,\vec{i} - sin\theta\,\vec{j} \text{ (0.25pts)} \end{cases}$$

$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r^2}\vec{U} \quad = k\frac{\lambda dy}{r^2}(cos\theta\,\vec{i} - sin\theta\,\vec{j})$

Ou bien: $dE_x = dEcos\theta = k\frac{dq}{r^2}\,cos\theta = \frac{\lambda dy}{x^2+y^2}cos\theta$(0. 5pts)

$dE_y = -dEsin\theta = -k\frac{dq}{r^2}\,sin\theta = -\frac{\lambda dy}{x^2+y^2}sin\theta$ (0. 5pts)

D`autre part $tg\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xtg\theta \Rightarrow dy = \frac{x}{cos^2\theta}d\theta$ (0.25pts)

Avec $\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{cos\theta}$(0.25pts)

Donc $dE_x = \frac{k\lambda}{x}\,cos\theta d\theta$ (0.25pts)

$dE_y = \frac{-k\lambda}{x}\,sin\theta d\theta$(0.25pts)

$E_x = \int dE_x = \frac{k\lambda}{x}\int_{-\alpha}^{\pi/2}\cos\theta d\theta$

$$E_y = \int dE_y = \frac{-k\lambda}{x}\int_{-\alpha}^{\pi/2} -\sin\theta d\theta$$

$E_x = \frac{k\lambda}{x}(1 + sin\alpha)$(0.5pts)

$E_y = \frac{-k\lambda}{x}cos\alpha$(0.5pts)

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{k\lambda}{x}\sqrt{1 + 2sin\alpha}$$

2-Pour un fil infini: $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$

$$E_x = \int dE_x = \frac{k\lambda}{x}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta$$

$dE_y = \int dE_y = \frac{k\lambda}{x}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\sin\theta d\theta = 0$ (0.5pts)

Donc $E = E_x = \frac{2k\lambda}{x}$ (0.5pts)

Le potentiel électrostatique :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{gradV} \\ E = E(x) \end{cases} \Rightarrow E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V = -\int Edx = -\int\frac{2k\lambda}{x}dx$$

$V = -2k\lambda.lnx + C$ (0.5pts)

<u>Exercice 3</u> : (8pts)

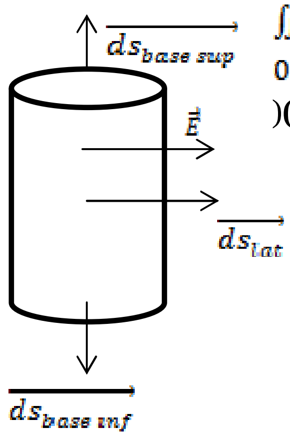
Pour calculer le champ électrique en tous points de l'espace, on applique le théorème de Gauss. On prend la surface de Gauss, un cylindre de rayon ***r*** et de hauteur h**(0.25)**

Le flux à travers la surface de Gauss :

$$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \textbf{ (0.5pts)}$$

$$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint E.ds_{lat} (\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds_{lat}}) \textbf{(0.25pts)}$$

(



$\iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{base\ sup}} = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{base\ inf}} = 0 \ car \vec{E} \perp \overrightarrow{ds_{base\ sup}} et\ \vec{E} \perp \overrightarrow{ds_{base\ inf}}$)**(0.5pts)**

(**0.5pts)**

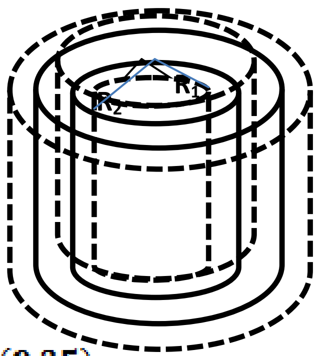
En raison de la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss**(0.25pts)**

$$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint E.ds_{lat} = E \iint ds_{lat} = E.2\pi rh \textbf{ (0.25pts)}$$

D'après le théorème de Gauss :

$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = E.2\pi rh = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (*) $\Longrightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\sum Q_{int}}{2\pi rh\varepsilon_0}$ **(0.5)**

<u>(01pts) 1</u>



<u>(01pts) 1er cas : r < R_1</u>

$Q_{int} = 0 \ (\mathbf{0.5}) \Rightarrow \boldsymbol{E_1} = \mathbf{0}$ **(0.5)**

<u>(01pts) 2eme cas : $R_1 \leq r < R_2$</u>

$dq = \sigma ds \Rightarrow \int dq = \sigma \int ds$**(0.25)**

$\Rightarrow Q_{int} = \sigma 2\pi R_1 h$**(0.25)**

Donc (*)$\Rightarrow E_2.2\pi rh = \sigma 2\pi R_1 h$ ce qui donne $\boldsymbol{E_2} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}$**(0.5)**

<u>(02pts) 3eme cas : r ≥ R_2 :</u>

$Q_{int} = Q_{R1} + Q_{R2}$**(0.25)**avec $Q_{R_1} = \sigma 2\pi R_1 h(\mathbf{0.25})$ et $Q_{R_2} = (2\sigma)2\pi R_2 h$ **(0.25)**

Donc $Q_{int} = \sigma 2\pi h(R_1 + 2R_2)(\mathbf{0.5})$

(1)$\Rightarrow E_3.2\pi rh = \sigma 2\pi h(R_1 + 2R_2)$ ce qui donne $\boldsymbol{E_3} = \frac{\sigma(R_1+2R_2)}{\varepsilon_0 r}$**(0.5)**

Pour r=R_1 : $\boldsymbol{E_2(R_1)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ **(0.25)** et pour r=R_2 : $\boldsymbol{E_3(R_2)} = \frac{\sigma(R_1+2R_2)}{\varepsilon_0 R_2} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 R_2} + 2\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ **(0.25)**

***<u>(01pts)</u>* <u>Le potentiel :</u>**

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}$ V **(0.25)**; puisque le champ est radial $E = -grad\ V \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$

Donc $dV = -Edr \Rightarrow V = -\int E\ dr$**(0.25)**

Pour $r \geq R_2$ $V_3 = -\int E_3\ dr \Rightarrow V_3 = -\int \frac{\sigma(R_1+2R_2)}{\varepsilon_0 r}\ dr$

Donc $V_3 = -\frac{\sigma(R_1+2R_2)}{\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r} \Rightarrow V_3 = -\frac{\sigma(R_1+2R_2)}{\varepsilon_0} lnr + C$ **(0.5)**