Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
- 1ère Année LMD-MI –AU 2015/2016-

Contrôle Continu –Analyse 2 –du 10/03/2016–

Les livres et documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Chacune de vos réponses doit être justifiée et argumentée.

Exercice 1 (13 Pts)

On définit la fonction f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f(x) = -|x| + \sqrt{|x^2 - 1| + x^2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f. **(1 pt)**

2) La fonction f est-elle paire, impaire ? **(0,5 pt)**

3) La fonction f *est-elle continue* sur son domaine de définition ? **(3 pts)**

4) Etudier la dérivabilité de f *aux* points **-1, 0** et **1**. **(1,5pts+ 1,5 pts +1,5 pts)**

5) Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction f. **(2 pts)**

6) Calculer f' sur son domaine de dérivabilité. **(2 pts)**

Exercice 2 (4Pts)

On définit la fonction g : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow g(x) = arcsin(\sqrt{2e^x - e^{2x}})$$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction g. **(2 pts)**

2) Déterminer le domaine de dérivabilité de g. **(1 pt)**

3) Calculer g'. **(1 pt)**

Exercice 3 (2 Pts)

Soit une application f de $[0\ ,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ et que $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)$.

Montrer que f'' s'annule au moins une fois dans $[0\ ,\ 1]$.

NB : 1 point est attribué à une copie bien présentée.

- Corrigé Succint - C.C - Analyse 2 - LMD. M.I -

Exercice 1 : (13 pts)

(1) Domaine de définition

Les applications $(x \longmapsto -|x|)$ et $(x \mapsto \sqrt{\underbrace{|x^2-1|+x^2}_{\geq 0}})$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$. (1 pt)

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -|-x| + \sqrt{|(-x)^2-1|+(-x)^2} = -|x| + \sqrt{|x^2-1|+x^2} = f(x)$.

Donc f est paire. (0,5 pt)

(3) Domaine de continuité de f.

méthode 1 :

$$f(x) = \begin{cases} x+\sqrt{2x^2-1} & \text{si } -1 < x \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ x+1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x < +1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ -x+\sqrt{2x^2-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

* L'application $(x \longmapsto x+\sqrt{2x^2+1})$ est continue sur $]-\infty,-1[$: comme somme et composée de fonctions continues. Donc f est continue sur $]-\infty;1[$ (0,5 pt)

* $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} x+\sqrt{2x^2-1} = 0 = f(0) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x+1$.

Donc f est continue en $x=-1$ (0,5 pt)

* L'application $(x \longmapsto 1+x)$ est continue sur $]-1,0[$: comme somme de fonctions continues. Donc f est continue sur $]-1,0[$ (0,5 pt)

* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1+x = 1 = f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1-x$. Donc f est continue en $x=0$. (0,5 pt)

* L'application $(x \mapsto 1-x)$ est continue sur $]0,1[$ comme somme de deux fonctions continues. Donc f est continue sur $]0,1[$ (0,5 pt)

* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1-x = 0 = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} -x+\sqrt{2x^2-1} = 0$. $\Rightarrow f$ continue en $x=1$. (0,5 pt)

methode 2 :

Comme f est paire et f est définie sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire par symétrie l'étude sur $\mathbb{R}$.

* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1-x = 1 = f(0^+)\ (= f(0^-)) = f(0)$) : Donc f est continue en 0 (0,5 pt)

* l'application $(x \mapsto 1-x)$ continue sur $]0,1[$ comme somme de fonctions continues sur $]0,1[$. Donc f est continue sur $]0,1[$ (0,5 pt)

* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1-x = 0 = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x+\sqrt{2x^2-1}$.

Donc f est continue en $x=1$ (0,5 pt)

* l'application $(x \mapsto -x+\sqrt{2x^2-1})$ continue sur $]1,+\infty[$ comme somme et composée de fonctions continues. Donc f est continue sur $]1,+\infty[$ (0,5 pt)

* Par symétrie, nous déduisons que f est continue sur

$]-\infty,-1[\, \cup \{-1\} \cup\,]-1,0[$. (1 pt)

(4) Dérivabilité de f aux points $x = -1$, 0 et 1.

* en $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x+\sqrt{2x^2-1}-0}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+\sqrt{2x^2-1})(x-\sqrt{2x^2-1})}{(x+1)(x-\sqrt{2x^2-1})} = -1 = f'_g(-1)$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1+x}{1+x} = 1 = f'_d(-1).$$ or $f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$.

Don f n'est pas dérivable en $x=-1$ (1,5 pts)

* en $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+x-1}{x} = 1 = f'_g(0)\ ; \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x-1}{x} = -1 = f'_d(0)$$

or $f'_g(0) \neq f'_d(0)$. Donc f n'est pas dérivable en $x=0$ (1,5 pt)

* en $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{x-1} = -1 = f'_g(1).$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-x+\sqrt{2x^2-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(-x+\sqrt{2x^2-1})(\sqrt{2x^2-1}+x)}{(x-1)(\sqrt{2x^2-1}+x)} = 1 = f'_d(1)$$

or $f'_g(1) \neq f'_d(1)$. Donc f n'est pas dérivable en $x=1$. 1,5 pt

⑤ Domaine de dérivabilité de f

* L'application $(x \mapsto x)$ est dérivable sur $]-\infty, -1[$; il en est de même pour l'application $(x \mapsto \sqrt{2x^2-1})$. On remarquera que $2x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$).
Donc f est dérivable sur $]-\infty, -1[$. 0,5 pt

* sur $]-1, 0[$: l'application $(x \mapsto 1+x)$ est dérivable. Donc f est dérivable sur $]-1, 0[$. 0,5 pt

* Sur $]0, 1[$: l'application $(x \mapsto -x+1)$ est dérivable. Donc f est dérivable sur $]0, 1[$. 0,5 pt

* Sur $]1, +\infty[$ l'application $(x \mapsto -x+\sqrt{2x^2-1})$ est dérivable, comme somme et composée de fonctions dérivable (on remarquera que $2x^2-1 \neq 0$ sur $]1, +\infty[$). Donc f est dérivable sur $]1, +\infty[$ 0,5 pt

⑥ f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. et f' est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}} & \text{si } -1 < x \quad 0,5\text{ pt} \\ 1 & \text{si } -1 < x < 0 \quad 0,5\text{ pt} \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1 \quad 0,5\text{ pt} \\ -1+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}} & \text{si } x > 1 \quad 0,5\text{ pt} \end{cases}$$

<u>Exercice 2</u>

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = \arcsin\sqrt{2e^x - e^{2x}}$$ 1 pt

On note D_g = l'ensemble de définition g

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2e^x - e^{2x} \geq 0 \text{ et } -1 \leq \sqrt{2e^x - e^{2x}} \leq 1 \right\}$$

or $\begin{cases} -1 \leq \sqrt{2e^x - e^{2x}} \leq 1 \\ 2e^x - e^{2x} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2e^x - e^{2x} \leq 1 \\ e^x \leq 2 \end{cases} \iff x \leq Ln(2)$

Donc $Dg =]-\infty, Ln(2)]$ (1pt)

② Domaine de derivabilité de g

L'application $(x \mapsto \sqrt{x})$ est derivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et l'application $(x \mapsto \arcsin x)$ est derivable sur $]-1, 1[$.

Donc g est derivable sur $\left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} 2e^x - e^{2x} \neq 0 \\ 1 - (2e^x - e^{2x})^2 \neq 0 \\ x \leq Ln(2) \end{cases} \right\}$ (0,5pt)

Ainsi g est derivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, Ln(2)[$ (0,5pt)

③ $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, Ln(2)[$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \frac{2(e^x - e^{2x})}{\sqrt{2e^x - e^{2x}}\sqrt{1-(2e^x - e^{2x}}} = \frac{e^x(1-e^x)}{\sqrt{e^x(2-e^x)(1-e^x)^2}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x(2-e^x)}} & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x(2-e^x}} & \text{si } 0 < x < Ln(2). \end{cases}$$ (1pt)

Excercice 3 (2pts)

* $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, verifie les hypothèses du théorème de ROLLE; en effet :
  ① f continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et derivable sur $]0; 1/2[$ (puisqu'elle est dérivable sur $[0, 1]$)
  ② $f(0) = f(\frac{1}{2})$ (0,5 pt)

Donc $\exists c_1 \in]0; \frac{1}{2}[\ : \ f'(c_1) = 0$

* Pour les mêmes raisons, si on considere $f : [1/2, 1] \to \mathbb{R}$. On peut affirmer qu'il existe $c_2 \in]1/2, 1[\ : \ f'(c_2) = 0$ (0,5 pt)
* Considerons $f' : [c_1 ; c_2] \to \mathbb{R}$ continue et derivable sur $]c_1, c_2[$ et de plus $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Par le theorème de ROLLE on a l'existence d'un $c \in]c_1, c_2[\subset [0, 1] \ : \ f''(c) = 0$ (1pt)