Pour le département

Université Abou-Bekr BELKAID
Faculté des Sciences

Année universitaire 2015-2016
Algèbre II. LMD MI.

Contrôle Continu
Durée 1h30'
L'usage de la CALCULATRICE et du TELEPHONE PORTABLE est strictement interdit.

Exercice 1 :

Soit p et n deux entiers naturels non nuls tels que $p < n$.
Soit E un $\mathbb{R}-$e.v., $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $A = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ une partie de B.
1) A est-elle libre ? Justifier.
2) Montrer que :

$$\forall x \in E \qquad \exists\,!\ (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

3) Soit F un $\mathbb{R}-$e.v. et $f : E \to F$ une application linéaire injecttive.
Montrer que $rang f = n$

Exercice 2 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (5, -1, 3), v = (0, 1, 2)$ et $w = (a, 0, 2), a \in \mathbb{R}$
1) Déterminer a pour que u, v et w soient linéairement indépendants.
2) Dans le cas où $\{u, v, w\}$ est liée, écrire le vecteur u en fonction des vecteurs v et w.

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les parties E, F et G par

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists k \in \mathbb{N}, y = kx\}$$
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$$
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$$

1)E, F et G sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? Justifier.
2) Dans le cas où l'ensemble est un s.e.v., déterminer sa dimension.
3) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$

Barème : Exercice 1 (7 pts) Exercice 2 (5 pts) Exercice 3 (8 pts)

$1^{\text{ère}}$ année L.M.D. MI

ALGEBRE 2

2015 - 2016

Corrigé du Contrôle continue

Exercice 1 : $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de E $\Rightarrow$ B libre et génératrice

1°/ $A = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset B$ $\quad (p<n)$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p \in \mathbb{R}$ tq: $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = 0$.

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p + 0 v_{p+1} + 0 v_{p+2} + \dots + 0 v_n = 0$

où $\{v_{p+1}, v_{p+2}, \dots v_n\} = B \setminus A$ c.à.d l'ens des vect de B qui n'$\notin$ à A

c.à.d $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = B$ et on sait que B est libre.

Alors : $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p + 0 v_{p+1} + \dots + 0 v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$

Cl : $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i = 1, \dots, p, \alpha_i = 0$

Ceci veut dire que A est libre

2°/. Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe au moins 2 écritures pour x :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ et } \beta_i \in \mathbb{R}$$

On a alors : $\underset{(x-x)}{0} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) e_i \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n, \ \alpha_i - \beta_i = 0$ car B base

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n, \ \alpha_i = \beta_i$ C.Q.F.D

3°/ $f : E \to F$ linéaire injective.

Rappel (cours) *) $\dim E = \text{Card } B$, où B est une base de E

*) f injective $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \text{Ker} f = 0$.

*) Th du rang : $\dim E = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$

*) $\text{rang} f = \dim \text{Im} f$

Alors : a°/ $\dim E = n$ car $\text{Card } B = n$ et B base de E

b/ f injective $\Rightarrow \dim(\text{Ker} f) = 0 \Rightarrow \dim E = \dim \text{Im} f \Rightarrow \text{rang} f = n$

Exercice 2 : $u = (5,-1,3)$ $v = (0,1,2)$ $w = (a,0,2)$

1) Déf : u, v et w lin^t indépendants $\Leftrightarrow [\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}, \ \alpha u+\beta v+\gamma w = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$

Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tq $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\alpha u+\beta v+\gamma w = 0 \Rightarrow \alpha(5,-1,3)+\beta(0,1,2)+\gamma(a,0,2) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow \begin{cases} 5\alpha + a\gamma = 0 \\ -\alpha+\beta = 0 \\ 3\alpha+2\beta+2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 5\alpha + a\gamma = 0 \\ 5\alpha + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ (a-2)\gamma = 0 \\ 5\alpha + a\gamma = 0 \end{cases}$. (*)

Si $a \neq 2$ alors $(a-2)\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$

Cl : $a \neq 2 \Leftrightarrow u, v$ et w linéairement indépendants

2°/ Déf : une famille est liée ssi elle n'est pas libre.

Alors : $\{u, v, w\}$ est liée si $a = 2$.

Dans ce cas : (*) $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma \text{ qq}^{e} \\ 5\alpha + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = -\frac{5}{2}\alpha$

On a alors : Pour $\alpha = 1$ par exple : (c.à.d si $\alpha = \beta = 1$)

$(1)u + (1)v - \frac{5}{2}w = 0$ et donc $u = -v + \frac{5}{2}w$

Exercice 3 Déf : F s.e.v de E $\Leftrightarrow \begin{cases} 1) F \neq \emptyset \\ 2) \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in F, \alpha u + \beta v \in F \end{cases}$

1°/ a) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists k \in \mathbb{N}, y = kx\}$

On a : $(1,2) \in E$ car $\exists k = 2$, $2 = 2.1$ et $(2,6) \in E$ car $\exists k = 3$, $6 = 3.2$

mais $(1,2)+(2,6) = (3,8) \notin E$ car $\forall k \in \mathbb{N}$ $8 \neq 3k$.

E n'est donc pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

b) F? 1) $(0,0) \in F$ car $0 = 2.0$ donc $F \neq \emptyset$

2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in F$, $(x',y') \in F$.

$(x,y) \in F \Rightarrow (x,y) = (x,2x)$ et $(x',y') \in F \Rightarrow (x',y') = (x',2x')$

$\alpha(x,y) + \beta(x',y') = \alpha(x,2x) + \beta(x',2x') = (\alpha x + \beta x', 2(\alpha x + \beta x')) \in F$

$= (X, 2.X)$ avec $X = \alpha x + \beta x'$

1) et 2) $\Rightarrow$ F est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

c) $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=0\}=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2,\ x\in\mathbb{R}\}$

1) $(0,0)\in G \Rightarrow G\neq\emptyset$

2) Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $(x,0)\in G$ et $(x',0)\in G$

$\alpha(x,0)+\beta(x',0)=(\alpha x+\beta x',0)\in G$ 1) et 2) $\Rightarrow G$ s.e.v de $\mathbb{R}^2$

*) E n'est pas un s.e.v.

*) dim F ? $\forall (x,2x)\in F$, $(x,2x)=x(1,2)$ donc $\{(1,2)\}$ famille génératrice de F

$(1,2)\neq(0,0) \Rightarrow \{(1,2)\}$ libre. Cl : $\{(1,2)\}$ base de F de cardinal 1

Cl : dim F = 1

*) dim G ? $\forall (x,0)\in G$, $(x,0)=x(1,0)$. Même chose dim G = 1

2°/ $F\oplus G=\mathbb{R}^2$: i) $F+G\subset\mathbb{R}^2$ ($F+G$ s.e.v de $\mathbb{R}^2$)

ii) $\mathbb{R}^2\subset F+G$ (?)

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\exists (a,2a)\in F$, $\exists (b,0)\in G$, $(x,y)=(a,2a)+(b,0)$ (?)

$(x,y)=(a,2a)+(b,0) \Leftrightarrow (x,y)=(a+b,2a) \Rightarrow \begin{cases} a+b=x \\ 2a=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=x-\frac{y}{2} \\ a=\frac{y}{2} \end{cases}$

Rem : a unique et b unique.

Ceci veut dire que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, (x,y) s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Cl : $F\oplus G=\mathbb{R}^2$.

Autre manière : On a $F+G=\mathbb{R}^2$.

Montrons $F\cap G=\{(0,0)\}$.

. Il est facile de dire $\{(0,0)\}\subset F\cap G$ car $(0,0)\in F$ et $(0,0)\in G$ (F et G 2 se.v)

.. $F\cap G\subset\{(0,0)\}$?

Soit $(x,y)\in F\cap G$.

$(x,y)\in F\cap G \Leftrightarrow (x,y)\in F$ et $(x,y)\in G \Leftrightarrow \begin{cases} \exists a\in\mathbb{R}\ (x,y)=(a,2a) \\ \exists b\in\mathbb{R},\ (x,y)=(b,0) \end{cases}$

$\Rightarrow (a,2a)=(b,0) \Rightarrow a=b$ et $a=0 \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0)$ C.Q.F.D

Cl : $\begin{cases} F+G=\mathbb{R}^2 \\ F\cap G=\{(0,0)\} \end{cases}$ Ça veut dire $F\oplus G=\mathbb{R}^2$.