Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
- 1ère Année LMD-MI –AU 2015/2016-

Rattrapage du contrôle Continu –Analyse 2 -Durée 1 h 30mn-

Les livres et documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Chacune de vos réponses doit être justifiée et argumentée.

Exercice 1 (11 Pts) **(Les parties *I)* et *II)* sont indépendantes.)**

I) On définit la fonction g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to g(x) = \sqrt{arctg(1-x^2)}$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction g. ***(2 pts)***

2) La fonction g est-elle paire, impaire ? ***(1 pt)***

3) La fonction g est-elle continue sur son domaine de définition ? ***(2 pts)***

4) Déterminer le domaine de dérivation de g et calculer la fonction g' ***(1 pt + 2 pts)***

II) On définit la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? ***(3 pts)***

Exercice 2 (5Pts)

On définit la fonction φ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \varphi(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in]1,2] \end{cases}$

1) Montrer que la fonction φ vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur [0,2]. ***(3 pts)***

2) Trouver les valeurs de c dans la formule du théorème des accroissements finis sur [0,2]. ***(2 pts)***

Exercice 3 (2Pts)

Soit ψ une application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $lim_{x\to+\infty}\ \psi(x) = 0$.

Montrer que si pour tout $x > 0$, $\psi'(x) \leq 0$, alors pour tout $x > 0$, $\psi(x) \geq 0$.

NB : 1 point est attribué à une copie bien présentée.

- Corrigé succint - Analyse 2 -
Epreuve de rattrapage du Contrôle Continu

Exercice 1 (11 pts)

I

1°) Comme $(1-x^2) \geq 0$ pour $x \in [-1,1]$ et $\operatorname{artg} x \geq 0$ pour $x \geq 0$.
Alors le domaine de definition $(x \mapsto \sqrt{\operatorname{Arctg}(1-x^2)})$ est $[-1,1]$ 2 pts

2°) soit $x \in [-1,1]$: $f(-x) = \sqrt{\operatorname{Arctg}(1-(-x)^2)} = \sqrt{\operatorname{artg}(1-x^2)} = f(x)$. 1 pt

3°) les applications $(x \mapsto (1-x^2))$ et $(x \mapsto \operatorname{artg} x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $(x \mapsto \sqrt{x})$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc g est continue sur $[-1,1]$ 2 pts

4) les applications $(x \mapsto (1-x^2))$, $(x \mapsto \operatorname{artg} x)$ et $(x \mapsto \sqrt{x})$ sont respectivement derivables sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*_+$. Il en résulte qu'en tout point x : $\operatorname{artg} x > 0$ g est derivable. D'où $\forall x \in]-1,1[$ g est derivable 1 pt
et par conséquent $\forall x \in]-1,1[$ $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{artg}(1-x^2)}} \cdot \dfrac{-2x}{(1+(1-x^2)^2)}$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-x}{\left(\sqrt{\operatorname{arctg}(1-x^2)}\right)\left([1+(1-x^2)^2]\right)} \quad x \in]-1,1[$$

2 pts

II

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin 1/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

les applications $(x \mapsto 0)$ et $x \mapsto (x^3 \sin 1/x)$ sont continues respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ et par consequent
f est continue sur $\mathbb{R}^*$

en $x=0$: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^3 \sin 1/x = 0$ 1 pt

Comme $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ f continue en $x=0$.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

les applications $(x \mapsto 0)$ et $(x \mapsto x^3 \sin 1/x)$ sont derivables respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$. Donc f est derivable sur $\mathbb{R}^*$. (Y)

en $x=0$: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \sin 1/x = 0$

$f'(0)=0$.

Donc f est derivable en 0 et $f'(0)=0$. 1 pt

Donc f est derivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi f est derivable sur $\mathbb{R}$.

Or $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 3x^2 \sin 1/x - x\cos 1/x & \text{si } x>0 \end{cases}$

pour les même raisons que f ; f' est continue sur $\mathbb{R}^*$

en $x=0$: $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 3x^2 \sin 1/x - x\cos 1/x = 0$ 1 pt

Donc f' est continue sur $\mathbb{R}$

Donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$

<u>Exercice 2</u> (5 pts) $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1/x & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$

$\left(x \mapsto \frac{3-x^2}{2}\right)$ continue sur $[0,1]$ et $(x \mapsto 1/x)$ continue sur $]1,2]$

en $x=0$ $\lim\limits_{x \to 1^-} \varphi(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} 1/x = 1 = \varphi(1)$

Donc φ est continue sur $[0,1]$ 1 pt

$\left(x \mapsto \frac{3-x^2}{2}\right)$ et $(x \mapsto 1/x)$ derivables respectivement sur $]0,1[$ et $]1,2[$ $\Rightarrow$ φ derivable sur $]0,1[\cup]1,2[$

en $x=1$ $\lim_{x\to 1^-} \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \lim \frac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1} = -1$. IV

$\lim_{x\to 1^+} \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \frac{1/x-1}{x-1} = -1$.

Donc φ est dérivable en $x=1$.

Donc φ est dérivable sur $]0,2[$

Ainsi les hypothèses du théorème des accroissements finis sont vérifiées pour φ sur $[0,2]$ 3pts

$\exists c\in]0,2[$: $\varphi(2)-\varphi(0) = 2\varphi'(c)$

or $\varphi(2)=1/2$ et $\varphi(0)=3/2$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{3}{2} = 2f'(c) = 2\begin{cases} -c & \text{si } 0<x\le 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } 1<x\le 2 \end{cases}$

2pts

$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$ et $c_2=\sqrt{2}$

Exercice 3 soit $x>0$

pour tout $y>x$ $f : [x,y]\to\mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]x,y[$ Donc d'après le théorème des accroissements finis $\exists z\in]x,y[$: $\varphi(y)-\varphi(x) = (y-x)\varphi'(z)$

D'après les hypothèses $\varphi(x)\geq\varphi(y)$

$\Longrightarrow \varphi(x) \geq \lim_{y\to+\infty} \varphi(y) = 0$.

$\Rightarrow \varphi(x)\geq 0$ 2pts