Pour Affichage

Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques- 1ère Année LMD-MI –AU 2015/2016-

Contrôle Continu –Analyse 1 -

Exercice 1 (4pts) :

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$:

a) $(x+2)^2 > 4$. **(1pt)**

b) $|x^2-7x+12| > x^2-7x+12$. **(1pt)**

2) Montrer $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$: $[x]+[y] \leq [x+y] \leq [x]+[y]+1$; (où $[\alpha]$ est la partie entière de $\alpha \in \mathbb{R}$). **(2pts)**

Exercice 2 (8pts) :

1) En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+1}{5n^2-1} = \frac{3}{5}$ **(1,5 pts).**

2) Montrer que la somme de deux suites bornées est une suite bornée. **(1,5 pts).**

3) Dire si l'énoncé suivant est vrai ou faux et **justifier votre réponse** :

Si (U_n) est une suite réelle bornée alors elle est convergente. **(1,5 pts).**

4) a) Etudier la nature de la suite de terme général $U_n = \frac{n(1+(-1)^{n+1})}{3n+2}$ **(1,5 pts).**

b) Montrer que la suite de terme général $U_n = \frac{3^{n+1}\sin(\frac{n\pi}{2})}{4^n}$ converge et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **(2pts)**

Exercice 3 (7pts) :

Soit (U_n) une suite réelle définie par : U_0 donné et pour $n \geq 0$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1$.

I) a) On suppose que $U_0 = 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n \leq 2$, et que la suite (U_n) est monotone. **(1 pt).**

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite. **(2 pts)**

II) 1) Soit $U_0 \neq 2$. On pose $V_n = U_n - 2$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique. **(1pt).**

2) Exprimer U_n en fonction de n et de U_0 **(1,5pt)**

3) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U_k}{n}$ **(1,5pts)**

NB : 1 point est attribué à une copie bien présentée.

- Corrigé succint – Contrôle Continu – LMD-MI -

Exercice 1: (4 pts)

1/ (a) $(x+2)^2 > 4 \iff (x+2)^2 - (2)^2 > 0 \iff x(x+4) > 0 \iff x > 0$ ou $x < -4$ 1pt

(b) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12 \iff |(x-3)(x-4)| > (x-3)(x-4)$ 1pt

$\iff 3 < x < 4$

2/

On sait que : $[x] \leq x < [x]+1$ et $[y] \leq y < [y]+1$

d'où $[x]+[y] \leq x+y < [x]+[y]+2$

Or $[x+y] \leq (x+y) < [x+y]+1$

Ainsi d'une part on a : $[x]+[y] \leq [x+y]$ et d'autre part $[x+y]+1 \leq [x]+[y]+2$

Donc $[x]+[y] \leq [x+y] \leq [x]+[y]+1$ 2pts

Exercice 2 (8 pts)

1/ $\lim U_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |U_n - l| < \varepsilon.$

soit $\varepsilon > 0$. on peut supposer que $N \geq 1$ et donc $n \geq N \geq 1$ entraine $5n^2 - 1 > 0$.

$$\left| \frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5} \right| = \frac{8}{5(5n^2-1)} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{5}\left(\frac{8}{5\varepsilon}+1\right) \iff n > \sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{8}{5\varepsilon}+1\right)}$$

Il suffit de prendre $N = \left[\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{8}{5\varepsilon}+1\right)}\right]+1$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{8}{5\varepsilon}+1\right)}\right]+1 : \forall n \geq N, \left| \frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-1}{5n^2+1} = \frac{3}{5}.$$

1,5pt

2/ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornee $\iff \exists K > 0 : \forall n : |U_n| \leq K$

Soient $(V_n)_n$ et $(W_n)_n$ deux suits bornees : $\exists K_1$ et K_2 positifs : $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |V_n| \leq K_1$ et $|W_n| \leq K_2$

$|V_n + W_n| \leq |V_n| + |W_n| \leq K_1 + K_2 = K \Rightarrow (V_n + W_n)_n$ bornée

(ou bien $(U_n)_n$ bornee $\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq U_n \leq M$) 1,5pt

Soient (V_n) et (W_n) bornees $\Leftrightarrow \exists\, m_1, m_2, M_1$ et M_2 : $m_1 \leq V_n \leq M_1$
$m_2 \leq W_n \leq M_2$

$\Rightarrow m_1 + m_2 = m \leq V_n + W_n \leq M_1 + M_2 = M \Rightarrow (V_n + W_n)$ bornee).

3/ L'enunce est Faux : en effet

soit (U_n) : $U_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$; on a bien $|U_n| \leq 1$ ($(U_n)_n$ bornee) et $(U_n)_n$ diverge.

1,5 pt

4/a) $U_{2n} = \dfrac{2n\left(1+(-1)^{2n+1}\right)}{3(2n)+2} = 0$ et $U_{2n+1} = \dfrac{(2n+1)\left(1+(-1)^{2n+2}\right)}{3(2n+1)+2} = \dfrac{4(2n+1)}{3(2n+1)+2} \to \dfrac{4}{3}$

Ainsi $\exists$ 2 sous-suites de $(U_n)_n$ qui convergent vers 2 limites $\neq$ donc $(U_n)_n$ diverge.

1,5 pt

b) $U_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Posons $\left(\frac{3}{4}\right)^n = V_n$ et $3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = W_n$.

on remarque que $\left|3\sin\frac{n\pi}{2}\right| \leq 3$. d'où

$$0 \leq |U_n| \leq 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3 \cdot V_n$$

or V_n est une suite geometrique qui tend vers 0 car $\left(\frac{3}{4}\right) < 1$.

Par la propriete du gendarme $(U_n)_n$ est convergente.

et la $\lim U_n = 0$.

2 pts

Exercice 3 (7 pts)

I a) $U_0 = 1$.

on a bien $0 < U_0 \leq 2$. Supposons $0 < U_n \leq 2$

$U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 1 \Rightarrow 0 < U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 1 \leq \frac{1}{2}(2) + 1 = 2 \Rightarrow 0 < U_{n+1} \leq 2$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < U_n \leq 2$ 0,5 pt

or $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} U_n + 1 - U_n = 1 - \frac{1}{2} U_n = \dfrac{2 - U_n}{2} \geq 0 \Rightarrow U_{n+1} \geq U_n \Rightarrow (U_n)_n$ croissante

0,5 pt

II /3

b) Comme $(U_n)_n$ est croissante $(U_{n+1}-U_n \geq 0)$ et $(U_n)_n$ majorée $(U_n \leq 2, \forall n)$. Alors

$(U_n)_n$ converge (1pt).

Soit $l = \lim_{n\to\infty} U_n$; l vérifie la relation $l = \frac{1}{2}l + 1 \Rightarrow \underline{l = 2}$ (0,5pt)

II) 1) $U_0 \neq 2$. On pose $V_n = U_n - 2 \Rightarrow V_n = \frac{1}{2}U_{n-1} + 1 - 2 = \frac{1}{2}U_{n-1} - 1 = \frac{1}{2}(U_{n-1} - 2)$

$$\Rightarrow V_n = \frac{1}{2}V_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 V_{n-2} = \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0$$ (1pt)

$\Rightarrow \forall n \geq 0 \quad V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0 \Rightarrow (V_n)_n$ est une suite géométrique

2) Or $U_n = V_n + 2 \Rightarrow U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0 + 2 \Rightarrow U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - 2) + 2$ (1pt)

Remarque : $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - 2) + 2 = 2$ (on retrouve le résultat de la question précédente)

3/ On sait que $\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ d'où $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{n} U_k = (U_0 - 2)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=0}^{n} 2 . = (U_0 - 2)\left[2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 2(n+1)\right.$

Par conséquent $\dfrac{\sum_{k=0}^{n} U_k}{n} = \frac{1}{n}\left[2(U_0 - 2)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\right. + \frac{2(n+1)}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=0}^{n} U_k}{n} = 2.$ (2pts)

Remarque : on retrouve le résultat théorique : si $U_n \to l \Rightarrow \frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} \to$

III / 3